ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ (ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ) ΣΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \eta\mu 2x \cdot dx$ β) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2}dx$

2) α) Να δείξετε ότι: $\int_0^{\alpha} x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2} xf(x)dx \, , \alpha > 0$

β)Με την χρήση του πιο πάνω αποτελέσματος , ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος : $\int_0^2 x^3 e^{x^2}dx$

3) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = e^x$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

4) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = (x-2)(x-4)$ και την ευθεία $y = x - 2$.

5) Αν **Τ** είναι το χωρίο που περικλείεται από τις συναρτήσεις $y = e^x$, $y = e^{2x}$ και την ευθεία y=e να βρείτε:

i. το εμβαδόν του χωρίου **Τ**.
ii. τον όγκος που παράγει το χωρίο **Τ** αν αυτό περιστραφεί κατά 2π γύρω από τον άξονα των y.
iii. τον όγκος που παράγει το χωρίο **Τ** αν αυτό περιστραφεί κατά 2π γύρω από τον άξονα των y=e

6) Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου που σχηματίζεται από την καμπύλη $\psi = (x-1)^2$ και την ευθεία y=1 γύρω από την ευθεία y=1.

7) Δίνεται το ολοκλήρωμα $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^\nu}{x^2+1}dx, \nu \in \{0,1,2,...\}$

α) $I_{2\nu} = \frac{1}{2\nu-1} - I_{2\nu-2}$, $\forall \nu \in \square$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I_4

8) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, με f(-x)=f(x) και g(x)+g(-x)=1, για κάθε πραγματικό αριθμό x.
(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση u = -x, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι:
$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x)dx = \int_0^{\alpha} f(x)dx \, , \alpha > 0$ (β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (α), ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^{2x}+1}dx$

9) Δίνεται συνάρτηση $f : R \to (0,+\infty)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία

ισχύουν: f ‘(2)= 0 , f(0)=1 και $\frac{1}{2}\int_0^2 x\cdot f''(x)dx+\frac{3}{2}\int_0^2 f'(x)dx=3$

α) Να δείξετε ότι: f (2)=4 .

β) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση u=f(x), όπου f η πιο πάνω συνάρτηση, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)+5f(x)+6}dx$$

11)Δίνονται δύο συνεχείς συναρτήσεις f:R→R και g:R→R, τέτοιες ώστε, f(x)+f(-x)=g(x)

(α) Με τη βοήθεια της αντικατάστασης u=-x ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι .

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=\int_0^{\alpha} g(x)dx$$

(β) Να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{3^{2x}+1}dx$

12) Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα [α ,β] χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση χ=α-β-u να αποδείξετε ότι:

α) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(\alpha+\beta-x)\cdot f(x)dx$ β) Να δείξετε ότι: $\int_0^1 \frac{\ln(x+3)}{(\ln(x+3)+\ln(4-x))}dx=\frac{1}{2}$

γ) Αν $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x+1}$ να αποδείξετε ότι: i) $f(x)+f(-x)=x^2+1, \forall x\in \mathbb{R}$ ii) $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\frac{4}{3}$

13) Να δείξετε ότι : $\int_0^{2\alpha} f(x)dx=\int_0^{\alpha} f(x)dx+\int_0^{\alpha} f(2\alpha-x)dx$ (α>0)

14) α) Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα [0 ,π] χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση χ=π-u ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι:

$$\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$$

β) να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_0^{\pi}\frac{x\eta\mu x}{8+\eta\mu^2 x}dx$

15) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση u=2α-x ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι:

$$\int_0^{2\alpha} f(2\alpha-x)dx=\int_0^{\alpha} f(x)dx$$

β) $f(x)+f(2x-\alpha)=2\beta, \forall x\in R$ να δείξετε ότι $\int_0^{2\alpha} f(x)dx=2\alpha\beta$

γ) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω , ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^4 [(x-2)^{2018}\eta\mu^{2019}(x-2)+3]dx$$

16) Έστω δύο συνεχής συναρτήσεις $f:R\to R$ με f(-x)= f(x) και $g:R\to R$ με g(-x) = - g(x)

α) Να δείξετε ότι: $\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}dx=\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$ β) Να υπολογίσετε το: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu^2x+5}{2e^{\eta\mu x}+2}dx$

17) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν:

$$2xf(x)+x^2(f'(x)-3)=-f'(x)\ ,\forall x\in R \text{ και } f(1)=\frac{1}{2}$$

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1},\ \forall x\in R$

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες

χ=α, χ=β, 0<α<β, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{x^3}{f(x)},\ x\neq 0$ και τον άξονα

χ΄χ είναι $E=\frac{(\beta-\alpha)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+3)}{3}$

18) Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις $f:R\to R$ και $g:R\to R$ τέτοιες ώστε $f(x)+f(-x)=g(x),\ \forall x\in R$

α) Με την βοήθεια της αντικατάστασης x=-u ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι:

$\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx=\int_{0}^{\alpha}g(x)dx$ β) Να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\varepsilon\varphi^2x}{1+3^x}dx$

19) Δίνεται η καμπύλη ψ=χ-χ^2 αφού κάνετε την γραφική παράσταση της

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα οχ

β)Να υπολογίσετε τον όγκο που παράγεται από την περιστροφή του πιο πάνω χωρίου γύρω από τον χχ΄ κατά 2π

20) Η καμπύλη ψ=χ^3 και η ευθεία χ+ψ=2 τέμνονται στο σημείο Α(1,1). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη, την ευθεία και τον άξονα των ψ.

21) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$\int_{1}^{2}x(x^2-3)^2dx$ $\int_{1}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}dx$ $\int_{0}^{4}(3\sqrt{x}-\frac{1}{3\sqrt{x}})dx$ $\int_{1}^{4}(x^2-4)^2dx$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{5-3\eta\mu 2x+4\sigma\upsilon\nu 2x}$ $\int_{0}^{\ln 2}3xe^xdx$ $\int_{0}^{\ln 2}\frac{e^{2y}}{1+e^y}dy$ $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x^2\sqrt{25x^2-1}}$

22) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη ψ=3-2χ-χ^2 , τον άξονα οχ και τις ευθείες χ=-1 ,χ=2.

23) Να υπολογίσετε τον όγκο που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των χ , του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y=e^{-x}$, την ευθεία χ=1 και του δύο άξονες συντεταγμένων.

24) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες ψ=9+6χ-χ^2 και ψ=2χ^2.

25) Δίνεται η καμπύλη $\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\chi^2}}$. Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη , τον άξονα των χ και τις ευθείες χ=α , χ=3α περιστρέφεται γύρω από τον άξονα οχ . Αν ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι $\frac{\pi^2}{6}$, να βρείτε την τιμή του α.

26) Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των $\psi^2=6\chi$ και ψ=χ στραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα οχ.

27) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $y = \chi e^{-x}$, τον άξονα των χ και την ευθεία χ=1.

28)Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $\psi = \chi^3$, τον άξονα των ψ και τις ευθείες ψ=-1 και ψ=1.

29) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = \frac{4}{1+\chi^2}$, την ευθεία $\chi = \sqrt{3}$ και τους άξονες συντεταγμένων.

30)Να αποδείξεται ότι $\alpha)\int_2^3 \frac{3x\,dx}{(x-1)(x+2)} = \ln\frac{25}{8}$ $\beta)\int_0^1 \frac{dt}{4+t-3t^2} = \frac{3}{7}\ln 2$

31) Επίπεδο χωρίο περικλείεται από την καμπύλη ψ^2 =χ την ευθεία ψ+χ=2 και τον άξονα των ψ. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται , όταν το χωρίο περιστραφεί κατά 2π γύρω από τον άξονα των ψ.

32)Δίνεται η καμπύλη $(\psi-2)^2 = \chi$ και την ευθεία χ-2ψ+4=0

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ τους .γ

γ) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγετε όταν το χωρίο στραφεί 2π γύρω από την ευθεία ψ=2

33) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες $\psi = \chi^2 - 6\chi$ και $\psi = 2\chi - \chi^2$.

34) Η περιοχή που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = e^{-x}$,την ευθεία ψ=3 και τον άξονα των ψ περιστρέφεται κατά 2π γύρω από την ευθεία ψ=3. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται.

35) Η περιοχή που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = 2\sqrt{\chi}$ την ευθεία χ=8 και τον άξονα των χ περιστρέφεται κατά 2π γύρω από τον άξονα χ , να βρείτε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται και την ολική του επιφάνεια

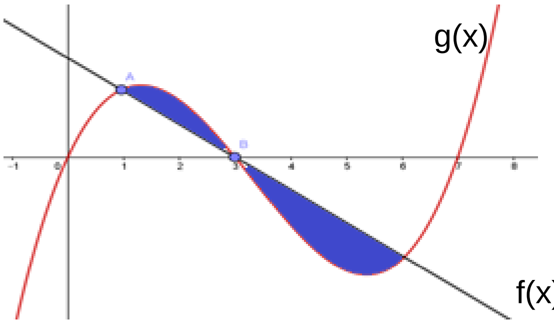
36) Η περιοχή που περικλείεται από την καμπύλη $\psi=4\chi^2$ και την ευθεία ΟΒ, όπου $B(\alpha, 4\alpha^2)$ σημείο της και Ο αρχή των αξόνων , έχει εμβαδόν 18τ.μ. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Β .

37)Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ του y=lnx ,y=-1 , y=2 και του άξονα των ψ.

38) Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγρται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την $\psi = 5 - \chi^2$ και την ψ=4 όταν περιστραφεί

α) γύρω από τον άξονα οχ

β) γύρω από τον άξονα οψ



39)Να βρείτε συναρτήσει ολοκληρωμάτων της f(x) και g(x) το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

40) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $\psi^2 = 8\chi$ και την ευθεία χ=2.

41) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το μέρος της $\psi=\chi^2$ για τα οποία το χ είναι θετικό , τον άξονα των ψ και τις ευθείες ψ=1 και ψ=4.

42) Να υπολογίσετε το εμβαδό που περικλείεται από τις καμπύλης $\psi=4-\chi^2$ και $\psi=\chi^2-2\chi$.

43) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη ψ=συνχ χє[0,π/2], την ευθεία ψ=χ+1 και τον άξονα των χ.

44) Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των ψ , του χωρίου που περικλείεται από την y=lnx , y=0 , y=1 και τον άξονα των ψ.

45) Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από το χωρίο που περικλείεται από την $\psi=\chi^2+1$ και την ψ=5 όταν στραφεί κατά 2π γύρω από την ευθεία ψ=5.

46) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $\psi=2\chi^2$ και

$\psi=6\chi-\chi^2$.

47) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $\psi=\chi^3-16\chi$.

48)Το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = e^x$ την ευθεία ψ=3 και των άξονα των ψ περιστρέφεται κατά 2π γύρω γύρω από τον άξονα των χ και μετα γύρω από την ευθεία ψ=3 .Να δείξετε ότι $V_x-V_\psi=4\pi$κ.μ

49)Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\psi^2=4\chi$, την εφαπτομένη της στο σημείο Α(4,4) και από τον άξονα των ψ.

Διαγώνισμα 1

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_1^2 \chi\cdot\sqrt{\chi-1}\,d\chi$ β) $\int_0^1 e^{\chi^2+\ln\chi}d\chi$. (15μ.)

2. Δίνεται συνάρτηση f με τοπικό ακρότατο το σημείο (1,3) και f ΄ συνεχή, για την οποία ισχύει $\int_0^1 e^{\chi}\cdot(f(\chi)-f'(\chi))\,d\chi = 0$. Να αποδείξετε ότι f(1) = f (0). (15μ)

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = \chi^2 - 4$, την εφαπτομένη

της στο σημείο της Σ (1,–3) και τον άξονα των χ. (15μ)

4. α) Αν το εμβαδόν του χωρίου Τ που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = e^{\chi}$ την ευθεία $\psi = \kappa$, $\kappa > 1$ και τον άξονα των ψ είναι ίσο με 1 τ.μ., να αποδείξετε ότι $\kappa = e$.

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου Τ γύρω από τον άξονα των χ. (20μ)

5. Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 4\chi$ και το σημείο της $P(1,2)$. Το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή και την ευθεία ΟΡ, όπου Ο η αρχή των αξόνων, περιστρέφεται κατά 360^o γύρω από τον άξονα των ψ. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται. (20μ)

6. Δίνονται τα ολοκληρώματα $\mathrm{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 1} dx$ και $\mathrm{B} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 1} dx$.

α) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $x = \frac{\pi}{2} - \psi$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

β) Να υπολογίσετε το $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ και το A . (15μ)

διαγώνισμα 2

1) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \eta\mu 2x \cdot dx$ β) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2} dx$

γ) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση u = e^x , ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ (β.5-5-8)

2) α) Να δείξετε ότι: $\int_0^{\alpha} x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha^2} x f(x) dx$, $\alpha > 0$

β) Με την χρήση του πιο πάνω αποτελέσματος , ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος : $\int_0^2 x^3 e^{x^2} dx$ (β.5-6)

3) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = (x-2)(x-4)$ και την ευθεία $y = x - 2$. (β.10)

4) Αν **T** είναι το χωρίο που περικλείεται από τις συναρτήσεις $y=e^x$, $y=e^{2x}$

και την ευθεία y=e να βρείτε:

iv. το εμβαδόν του χωρίου **T**.

v. τον όγκος που παράγει το χωρίο **T** αν αυτό περιστραφεί κατά 2π γύρω από τον άξονα των y=e (β.7-7)

5) Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου που σχηματίζεται από την καμπύλη $\psi=(x-1)^2$ και την ευθεία y=1 γύρω από τον άξονα των y.

6) Δίνεται το ολοκλήρωμα $I_\nu=\int_0^1 \frac{x^\nu}{x^2+1}dx,\quad \nu\in\{0,1,2,3,...\}$

α) Να δείξετε ότι $I_{2\nu}=\frac{1}{2\nu-1}-I_{2\nu-2}$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I_4 (β.8)

7) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, με f(-x)=f(x) και g(x)+g(-x)=1, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση u = -x, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο,

να δείξετε ότι: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x)dx=\int_0^{\alpha} f(x)dx\ ,\alpha>0$

(β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (α), ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο,

να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^{2x}+1}dx$ (β.7-7)

8) Δίνεται συνάρτηση $f:R\to(0,+\infty)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία

ισχύουν: f΄(2)= 0 , f(0)=1 και $\frac{1}{2}\int_0^2 x\cdot f''(x)dx+\frac{3}{2}\int_0^2 f'(x)dx=3$

α) Να δείξετε ότι: f (2)=4 .

β) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση u=f(x), όπου f η πιο πάνω συνάρτηση, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

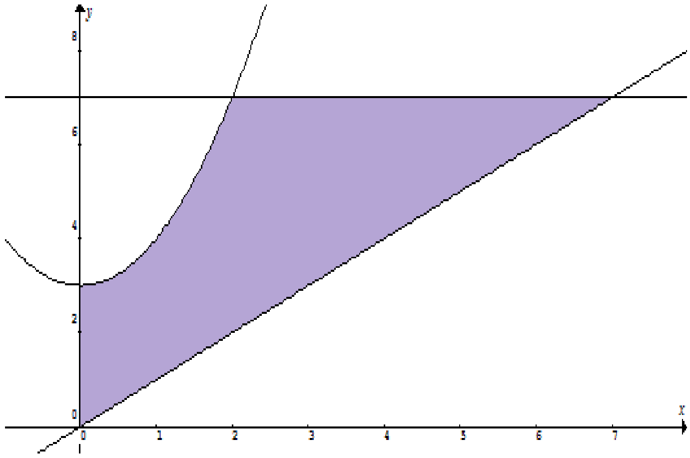
$\int_0^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)+5f(x)+6}dx$ (β.10)

Διαγώνισμα 3

1) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :α) $\int_0^1 (2x-1)^6 dx$ β) $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\cdot dx$ (β .4)

2) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = x^3 + 1$ **και** $y = x + 1$ και βρίσκεται στο α΄ τεταρτημόριο . (β .3)

3) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 + 3$ τις ευθείες **y=x, y=7** και τον άξονα των **y'y** (β. 3)



4) Φέρουμε την εφαπτομένη της καμπύλης $y = \ln x$ στο σημείο της P (e ,1) να βρείτε :

α) ότι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $y = \frac{1}{e}x$

β) το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη , την καμπύλη και τον άξονα των x΄x

γ) τον όγκο που σχηματίζεται όταν το πιο πάνω χωρίο περιστρέφεται κατά 2π γύρω από τον άξονά των y'y

δ) τον όγκο που σχηματίζεται όταν το πιο πάνω χωρίο περιστρέφεται κατά 2π γύρω από τον άξονά των x'x (β .7)

5) Δίνονται τα ολοκληρώματα $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\varepsilon\varphi x)^e}$ και $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\varepsilon\varphi x)^e}{1+(\varepsilon\varphi x)^e}dx$.Με την βοήθεια της αντικατάστασης $t = \frac{\pi}{2} - x$: α) να δείξετε ότι A=B

β) να υπολογίσετε το A+B

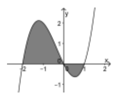
γ) να υπολογίσετε το A και το B (β.3)

διαγώνισμα 4

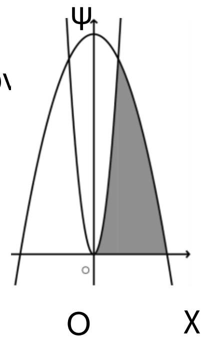
1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_1^4 \sqrt{x}\, d\chi$ β) $\int_1^{e^2} ln\chi\, d\chi$

2. α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη ψ = h(χ) και τον άξονα των χ, με την βοήθεια του ορισμένου ολοκληρώματος.

h(χ)



β) Στο 2ο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
f(χ) = 9 – $χ^2$ και g(χ) = 8 $χ^2$.
Να υπολογίσετε το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου.



3. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από

τον άξονα των χ του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη ψ = $e^{-\chi}$ και τις ευθείες χ = 1 και ψ = χ + 1.

4. Το χωρίο Τ περικλείεται από την καμπύλη $\psi = \sqrt{\chi}$, την ευθεία ψ = χ – 2 και τον άξονα των ψ.Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή χωρίου Τ γύρω από τον άξονα των ψ.

5. Δίνονται τα ολοκληρώματα $A = \int_{\frac{1}{e}}^{\sigma\varphi\chi} \frac{du}{u(1+u^2)}$ και $B = \int_{\frac{1}{e}}^{\varepsilon\varphi\chi} \frac{u\, du}{1+u^2}$.

α) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $u = \frac{1}{t}$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι

$$A = \int_{\varepsilon\varphi\chi}^{e} \frac{t\, dt}{1+t^2} .$$

β) Να αποδείξετε ότι $A + B = 1$.

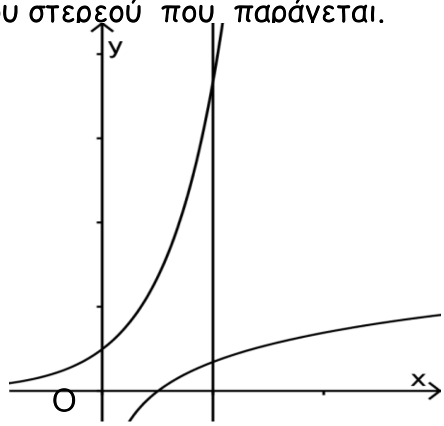
Διαγώνισμα 5

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_0^1 x\,e^x dx$ β) $\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$ (β.20)

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 - 4x + 3$ και τον άξονα χ΄χ. (β.10)

3. Το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $y = \sqrt{x}$ και $\psi = \chi^3$ περιστρέφεται κατά 2π γύρω από τον άξονα χ΄χ. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται. (β.15)

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $\psi = e^x$, $\psi = \ln x$, την ευθεία χ = 2 και τους άξονες συντεταγμένων.



(β.15)

5. Το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή $\psi^2 = 4\chi$, την εφαπτομένη της στο Α (1 , 2) και τον άξονα ψψ΄ περιστρέφεται κατά 2π γύρω από τον άξονα ψψ΄. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται. (β.15)

6. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x = \frac{\pi}{2} - u$ να δείξετε ότι:

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\nu} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^{\nu} x\,dx$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, (β.10)

β)Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sigma\upsilon\nu^2\chi - \eta\mu^2\chi)dx$ (β.5)

ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sigma\upsilon\nu^3\chi + \eta\mu^3\chi)dx$